



Proposition d'une méthode itérative de couplage FEM-BEM pour l'analyse des problèmes de la rupture élasto-plastique

B. Aour^{1,*}, D. Boumaiza^{1,2}

¹Laboratory of Applied Biomechanics and Biomaterials (LABAB), National Polytechnic School of Oran, Algeria

²Faculty of Science and Technologies, University Mustapha Stambouli, Mascara, 29000, Algeria.

*Contact: ben_aour@yahoo.fr

Résumé - Dans ce travail, nous avons adopté une méthode itérative pour effectuer le couplage de la méthode des éléments finis (FEM) et la méthode des éléments frontières (BEM), dans le but d'analyser les problèmes de mécanique de la rupture élastoplastique. Notant que cette technique est considérée comme l'une des plus récentes approches pour la combinaison des deux méthodes. Elle consiste à subdiviser le domaine du problème en deux sous-domaines, dont l'analyse se fait conjointement par la FEM et la BEM. Un renouvellement successif des variables à l'interface est effectué pour le sous domaine de la BEM suivant une procédure itérative jusqu'à la vérification des conditions de la convergence. Des exemples de validation sont présentés à la fin de ce travail.

Mots-clés: Couplage FEM-BEM; Mécanique de la rupture; Elastoplasticité.

Proposition of an iterative coupling method FEM-BEM for the analysis of elasto-plastic fracture problems

Abstract - In this work, we have adopted an iterative method to perform the coupling of the finite element method (FEM) and the boundary element method (BEM) in order to analyze the problems of the elastoplastic fracture mechanics. Noting that this technique is considered one of the most recent approaches for the combination both methods. It consists of subdividing the problem domain into two sub-domains, which are analyzed jointly by the FEM and BEM. A successive renewal of the variables at the interface is carried out for the BEM sub-domain following an iterative procedure until

the verification of the convergence conditions. Validation examples are presented at the end of this work.

Keywords: Coupling FEM-BEM; Fracture mechanics; Elastoplasticity.

I. Introduction

Pour des configurations simples de fissuration, des expressions analytiques pour la détermination de K_I sont disponibles dans la littérature [1]. Toutefois, pour des fissures avec des configurations géométriques plus complexes, il n'existe pas des méthodes analytiques. Dans ce cas, le facteur d'intensité de contrainte peut être obtenu par des voies expérimentales, cependant, une telle procédure est coûteuse et nécessite des efforts énormes. Par conséquent, l'utilisation des méthodes numériques pour la détermination de K_I s'avère un outil plus économique et plus souple. Dans ce contexte, plusieurs travaux ont été réalisés pour développer des techniques spéciales pour la détermination du facteur d'intensité de contrainte avec plus de précision en utilisant la méthode des éléments finis [2-3].

D'un autre côté, l'examen de la méthode de couplage FEM-BEM pour ce type de problème, présentant une concentration de contrainte dans une zone bien déterminée, paraît très intéressant. Dans ce cas, la zone au voisinage de la fissure qui peut avoir un comportement non linéaire est facile à modéliser par la FEM, alors que pour le reste du domaine, qui est linéaire, peut-être simplement modélisé par les éléments frontières. Il est à noter que, les éléments finis sont utilisés à proximité de la fissure parce que : (i) les paramètres de fissuration peuvent être facilement calculés avec précision en utilisant la méthode des éléments finis, même avec un comportement non linéaire et (ii) la formulation des éléments frontière est bien établie pour le comportement linéaire et permet une réduction considérable de la taille du système final d'équations.

Dans ce travail on s'intéresse à l'application des techniques les plus couramment utilisés dans la méthode des éléments finis, à savoir les éléments spéciaux QP (quarter-point) et l'intégrales J [4,5]. Pour tester la fiabilité et l'efficacité de l'approche proposée, plusieurs problèmes de la mécanique de la rupture ont été analysés. Les facteurs d'intensité de contraintes (FIC) ont été évalués en utilisant les techniques des éléments spéciaux QP (Quarter-point) et d'intégrale J implémentés dans le code de FEM. La convergence de ces techniques a été également testée en utilisant le couplage itératif FEM-BEM proposé. Les résultats ont montré cette technique de couplage peut être facilement appliquée pour l'analyse des problèmes de la mécanique de la rupture avec plus de souplesse et de précision.

II. Evaluation des contraintes et déplacements au voisinage d'une fissure

Les contraintes et les déplacements au voisinage d'une fissure on été calculés par Irwin (voir Owen and Fawkes [6]), en utilisant la théorie de l'élasticité et en tenant compte des conditions de Hooke. Ils sont exprimés en « mode I » par les relations ((1) à (9)) avec les notations de la Fig. 1.

Contraintes :

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (1)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (3)$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \text{ en déformations planes} \quad (4)$$

$$\sigma_{zz} = 0 \text{ en contraintes planes} \quad (5)$$

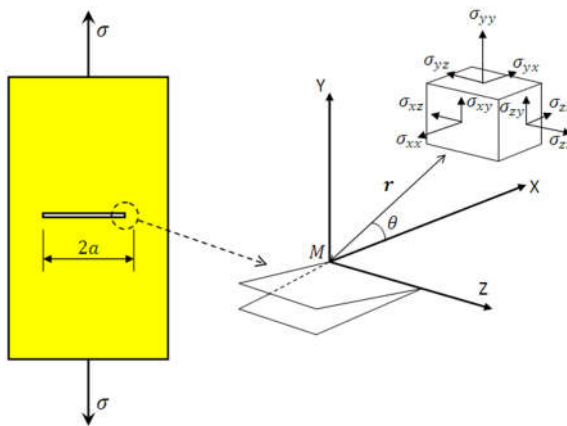


Fig. 1. Contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fissure.

Déplacements:

$$U_x = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (6)$$

$$U_y = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (7)$$

$$\kappa = 3 - 4\mu \quad \text{En déformations planes} \quad (8)$$

$$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 - \nu} \quad \text{En contraintes planes} \quad (9)$$

III. Matrice de rigidité

La matrice de rigidité est obtenue en utilisant le principe des travaux virtuels qui stipule l'égalité entre le travail interne et le travail externe sous l'effet d'un déplacement virtuel. Ainsi, pour un élément, le travail interne Q_i qui est la variation de l'énergie de déformation de l'élément est donné par [6] :

$$Q_i = \int_V \{d\varepsilon(\xi, \eta)^T \{\sigma(\xi, \eta)\}\} dV \quad (10)$$

$$Q_i = \{d\delta^e\}^T \int_V [\mathbf{B}(\xi, \eta)^T [\mathbf{D}][\mathbf{B}(\xi, \eta)]] dV \{\delta^e\} \quad (11)$$

Le travail externe Q_e dû à un déplacement virtuel est :

$$Q_e = \{d\delta^e\}^T \{\mathbf{F}^e\} \quad (12)$$

Or : $Q_i = Q_e$.

On aura :

$$\{d\delta\}^T \{\mathbf{F}^e\} = \{d\delta\}^T \int_V [\mathbf{B}(\xi, \eta)^T [\mathbf{D}][\mathbf{B}(\xi, \eta)]] dV \{\delta^e\} \quad (13)$$

D'où :

$$\{\mathbf{F}^e\} = \int_V [B(\xi, \eta)^T [D][B(\xi, \eta)]] dV \{\delta^e\} \quad (14)$$

On sait que :

$$\{\mathbf{F}^e\} = [\mathbf{K}^e] \{\delta^e\} \quad (15)$$

D'où :

$$[\mathbf{K}^e] = \int_V [B(\xi, \eta)^T [D][B(\xi, \eta)]] dV \quad (16)$$

D'autre part :

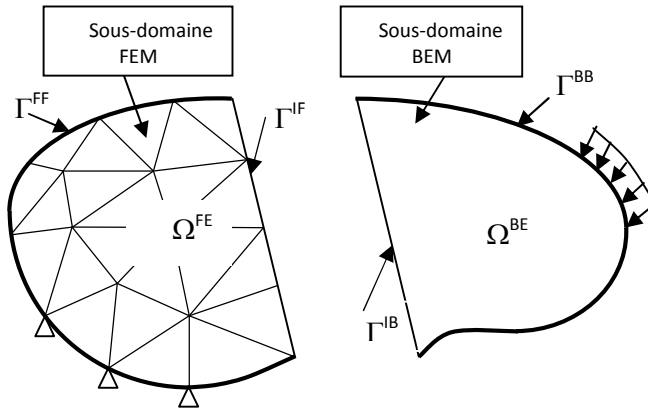
$$dV = h dx dy = h \det[J] d\xi d\eta \quad (17)$$

D'où :

$$[K^e] = h \int_{-1}^{-1} \int_{+1}^{+1} [B(\xi, \eta)]^T [D] [B(\xi, \eta)] \det[J] d\xi d\eta \quad (18)$$

IV. Procédure de couplage :

Dans cette section nous considérons l'application de la méthode itérative de couplage pour l'analyse des problèmes élastoplastiques non linéaires. Comme n'importe quelle autre procédure de couplage, le point de départ est la décomposition du domaine du problème original Ω en deux sous-domaines Ω^{FE} et Ω^{BE} comme le montre la Fig. 2.



$$\Omega = \Omega^{FE} + \Omega^{BE}, \quad \Gamma = \Gamma^{FF} + \Gamma^{BB}, \quad \Gamma^{FE} = \Gamma^{FF} + \Gamma^{IF}, \quad \Gamma^{BE} = \Gamma^{BB} + \Gamma^{IB}$$

Fig. 2. Discrétisation du domaine original du problème par FEM-BEM.

Afin d'illustrer la technique de couplage, les systèmes d'équations pour les sous domaines de la BEM et FEM respectivement, peuvent encore être réparties en ceux associés à l'interface, et non associées à l'interface comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_B^B & \mathbf{H}_B^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_B^B \\ \mathbf{u}_B^I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_B^B & \mathbf{G}_B^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_B^B \\ \mathbf{t}_B^I \end{Bmatrix} \quad \text{pour le sous-domaine BEM} \quad (19)$$

$$\{\Delta \Psi_F\} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_F^F & \mathbf{K}_F^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_F^F \\ \Delta \mathbf{u}_F^I \end{Bmatrix} - \{\Delta \mathbf{F}_F\} \quad \text{pour le sous-domaine FEM} \quad (20)$$

où les exposants F, B et I représentent respectivement les éléments finis, les éléments frontières et l'interface. Par exemple, \mathbf{H}_B^B est la matrice des coefficients d'influence correspondante aux déplacements hors interface \mathbf{u}_B^I

sur la frontière Γ^{BB} , \mathbf{H}_B^I est la matrice des coefficients d'influence correspondant aux déplacements à l'interface sur la frontière Γ^{IB} , etc.

Malheureusement les deux méthodes ne peuvent pas être directement couplées à l'interface puisque les variables de base dans la BEM sont les déplacements et les tractions surfaciques, cependant pour la FEM sont les déplacements et les forces nodales. Par conséquent, afin d'établir une relation entre les forces et les tractions nodales, le principe des travaux virtuels a été appliqué [7]. Ce principe stipule que le long de l'interface, les travaux effectués par les tractions et les forces nodales d'interface, dues à un déplacement virtuel arbitraire u sont égaux.

$$\delta W^e = (\delta u^e)^T F^e \tag{21}$$

Le travail effectué par les tractions appliqués au cours du déplacement virtuel δu dans la direction de x et δv dans la direction de y , peut être exprimé comme suit :

$$\delta W^e = \int_{\Gamma} (t_x \delta u + t_y \delta v) d\Gamma \tag{22}$$

Ecrivant δu , δv , t_x et t_y en fonction de leurs valeurs nodales, c.-à-d

$$\delta u(\xi) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) \delta u_i^e, \quad \delta v(\xi) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) \delta v_i^e \tag{23}$$

$$t_x(\xi) = \sum_{j=1}^3 N_j(\xi) (t_x)_j^e, \quad t_y(\xi) = \sum_{j=1}^3 N_j(\xi) (t_y)_j^e \tag{24}$$

Alors les eqs. (23) et (24) peut être réécrite comme suit:

$$\delta W = \sum_{i=1}^3 \left[\delta u_i \sum_{j=1}^3 \left\{ (t_x)_j \int_{\Gamma} N_i(\xi) N_j(\xi) d\Gamma \right\} + \sum_{j=1}^3 \left\{ (t_y)_j \int_{\Gamma} N_i(\xi) N_j(\xi) d\Gamma \right\} \delta v_i \right] \tag{25}$$

Le travail correspondant effectué par le vecteur de force nodal équivalent est:

$$\delta W = \sum_{i=1}^3 \left[(F_x)_i \delta u_i + (F_y)_i \delta v_i \right] \tag{26}$$

En comparant les eqs. (25) et (26), on peut déduire que:

$$(F_x)_i = \sum_{j=1}^3 (t_x)_j \int_{\Gamma} N_i(\xi) N_j(\xi) d\Gamma \tag{27}$$

$$(F_y)_i = \sum_{j=1}^3 (t_y)_j \int_{\Gamma} N_i(\xi) N_j(\xi) d\Gamma \tag{28}$$

L'intégration est effectuée en utilisant la quadrature de Gauss. Par conséquent, un vecteur de forces nodales F^e pour un élément peut être exprimé en termes d'un vecteur de tractions nodales élémentaires t^e comme suit:

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{M}^e \mathbf{t}^e \tag{29}$$

avec \mathbf{M} est la matrice de conversion, qui dépend des fonctions d'interpolation.

À l'interface entre les deux sous-domaines, la compatibilité et les conditions d'équilibre devraient être satisfaites, c.-à-d.

$$\mathbf{u}_B^I = \mathbf{u}_F^I \text{ sur } \Gamma^I \quad (30)$$

$$\mathbf{t}^{IF} + \mathbf{t}^{IB} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma^I \quad (31)$$

Les étapes de base de l'algorithme itératif de couplage sont montrées dans l'organigramme de la Figure 3 et peuvent se résumer comme suit [8]:

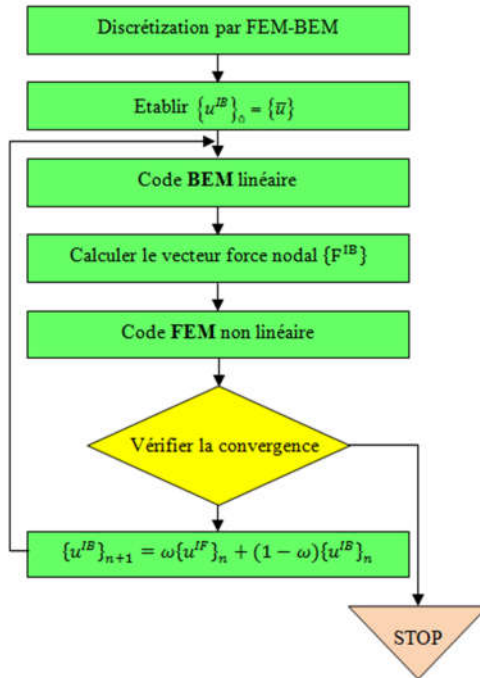


Fig. 3. Illustration des étapes du couplage itératif FEM-BEM.

1. Subdivision du domaine du problème considéré en deux sous-domaines bien adaptés à la modélisation par les méthodes FEM et BEM.
2. Donner une première estimation concernant les déplacements à l'interface pour le sous-domaine BE, $\{\mathbf{u}^{IB}\}_0 = \{\bar{\mathbf{u}}\}$, où $\{\bar{\mathbf{u}}\}$ est un vecteur arbitraire connu. Par convenance, des déplacements nuls peuvent être assignés à l'interface FEM-BEM, qui représente effectivement la situation initiale immobile de l'interface.

3. Faire appel au code de calcul par BEM pour déterminer les tractions $\{\mathbf{t}^{IB}\}$ d'interface en utilisant l'éq. (19).
4. Calculer les forces nodales équivalentes $\{\mathbf{F}^{IB}\}$ le long de l'interface en utilisant l'éq. (29).
5. Utiliser $\{\mathbf{F}^{IF}\} = -\{\mathbf{F}^{IB}\}$ comme conditions aux limites pour le sous-domaine BEM.
6. Appeler le code de FEM pour la détermination des déplacements à l'interface par l'utilisation de l'éq. (20), et mettre $\{\mathbf{u}_{F,i+1}^I\}_{n+1} = \{\mathbf{u}_{F,i}^I\}_n + \{\Delta\mathbf{u}_{F,i}^I\}_n$.
7. Vérifier si $\frac{\|\{\mathbf{u}_F^I\}_{n+1} - \{\mathbf{u}_B^I\}_n\|}{\|\{\mathbf{u}_F^I\}_{n+1}\|} \leq \varepsilon$, où ε est une tolérance prédéfinie. Si oui le processus est arrêté; sinon, poser pour la prochaine itération $\{\mathbf{u}_B^I\}_{n+1} = \omega\{\mathbf{u}_F^I\}_n + (1-\omega)\{\mathbf{u}_B^I\}_n$, où ω est un paramètre de relaxation permettant d'assurer et accélérer la convergence.
8. Revenir à l'étape 1, jusqu'à la convergence de la solution.

V. Résultats et discussion

V.1. Analyse élastique - Cas d'une plaque à fissure centrale

Afin de tester la convergence de la technique de couplage, pour l'évaluation des facteurs d'intensité de contrainte, trois différents maillages, pour la plaque de la Fig. 4.a, ont été examinés comme le montre la Fig. 5. Le premier maillage (A) est composé de 12 éléments finis (FE) couplés avec 8 éléments frontières (BE), le second maillage (B) est composé de 24FE combinés avec 16BE et le troisième maillage (C) est composé de 36FE en combinaison avec 24BE. Notant que des éléments quadratiques (d'ordre 2) ont été utilisés pour la discrétisation FEM-BEM.

L'analyse par éléments finis a été également réalisée en utilisant trois maillages avec 16, 40 et 70 éléments quadratiques isoparamétriques comme illustre la Fig. 5. Il est important de noter également qu'on a utilisé le même raffinement du maillage de telle sorte qu'on peut faire une comparaison. Les résultats obtenus en utilisant la technique d'extrapolation des déplacements (TED) et la technique d'intégral J (TIJ) sont présentés dans le tableau1, alors que la Fig. 6 représente les erreurs relatives en % par rapport à la solution analytique donnée par Tada et al. [9]. On peut remarquer que pour les deux méthodes, FEM et FEM-BEM, les meilleurs résultats sont obtenus avec la technique d'intégrale J (TIJ), vue que la solution converge vers la solution exacte en raffinant le maillage. Alors que, dans le cas d'utilisation de la

technique d'extrapolation des déplacements (TED) avec des éléments QP, les résultats obtenus semblent relativement instables, étant donné que le raffinement du maillage n'engendre pas forcément la convergence de la solution, en particulier pour ceux obtenus par la FEM en comparaison avec ceux du couplage FEM-BEM.

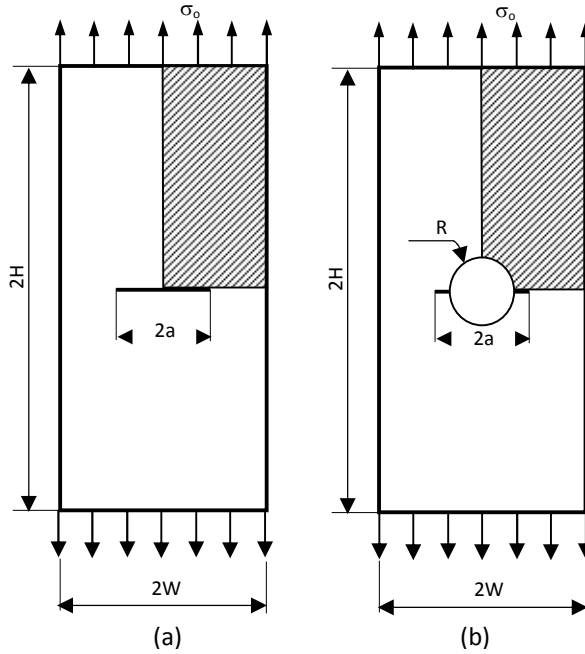


Fig. 4. Problèmes de fissuration analysés:(a) plaque à fissure centrale, (b) plaques à fissures émanant d'un trou circulaire.

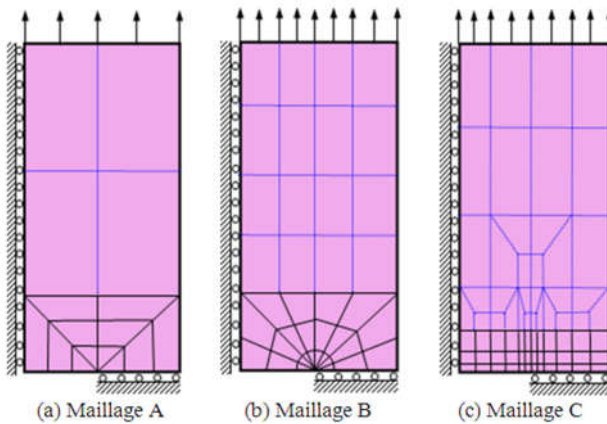
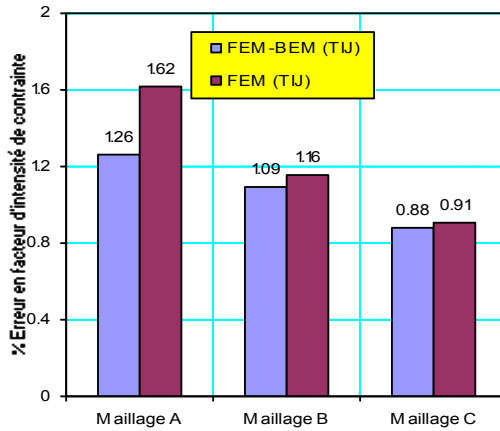


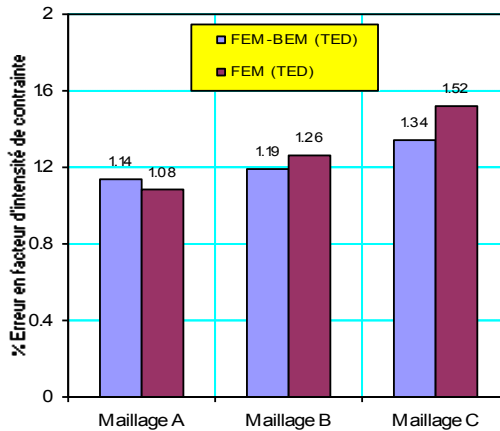
Fig. 5. Différents maillages de la plaque à fissure centrale.

Tab. 1. Valeurs de K_I dans le cas d'une plaque à fissure centrale (avec $a/W=0.5$) en utilisant FEM et FEM-BEM.

Evaluation de K_I	Maillage A	Maillage B	Maillage C
FEM-BEM (TED)	463,81	463,56	462,85
FEM (TED)	464,04	463,22	462.01
FEM-BEM (TIJ)	463,23	464,03	465,02
FEM (TIJ)	461,52	463,69	464.87
Sol. Analytique	469,14		



(a)



(b)

Fig. 6. Evolution de l'erreur dans les calculs du FIC avec (a) TIJ et (b) TED pour $a/W = 0.5$.

Pour illustrer la performance et mettre en évidence la souplesse de la méthode de couplage FEM-BEM pour l'analyse des problèmes de la mécanique de la rupture, nous avons étudié les distributions des contraintes le long de la distance radiales à partir de la pointe de fissure avec $\theta = 0$ en fonction de la longueur de la fissure (Fig. 7) en utilisant la technique d'intégrale J. Pour faciliter la discrétisation du sous domaine FEM en fonction de la variation de la longueur de fissure, nous avons utilisé un maillage de type C (Fig. 5.c). Avec ce type de maillage, il suffit d'utiliser uniquement deux ou trois rangés d'éléments finis en couplage avec le reste du domaine discrétisé en éléments frontières. Cela représente un avantage indéniable par rapport à la méthode des éléments finis, qui nécessite un maillage suffisamment raffiné et qui conduit donc à une augmentation du nombre d'équations à résoudre. L'utilisation de cette méthode nous permet de raffiner le maillage localement au niveau de la fissure pour augmenter la précision sans toutefois alourdir les calculs, du fait que le raffinement ne concerne qu'une zone très limitée au voisinage de la fissure.

La Figure 7 présente une comparaison des résultats obtenus par la technique de couplage FEM-BEM et les solutions analytiques données par Flemming et al. [10] pour deux différentes longueurs relatives de fissure ($a/W = 0.2$ et 0.5). On peut remarquer qu'il existe un bon accord entre les deux types de résultats.

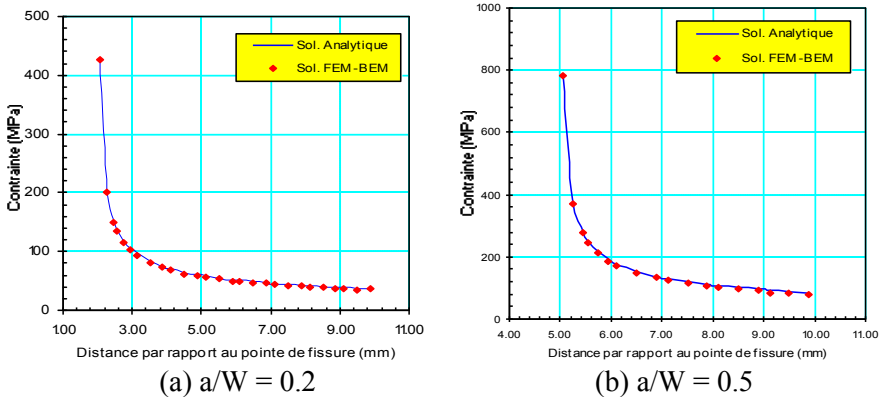


Fig. 7. Distributions des contraintes σ_{yy} au voisinage de la pointe de fissure pour ($\theta = 0$ et $r > 0$) dans le cas : (a) $a/W = 0.2$, (b) $a/W = 0.5$.

La Figure 8 illustre l'évolution des erreurs relatives sur le FIC en fonction de la longueur de fissure. Cette dernière montre que les solutions obtenues par la méthode du couplage FEM-BEM sont en bonne concordance avec celles obtenues par la FEM. On peut remarquer également que les deux méthodes sont en accord acceptable avec la solution analytique donnée par Tada et al. [6] vu que l'erreur maximale ne dépasse pas les 4%.

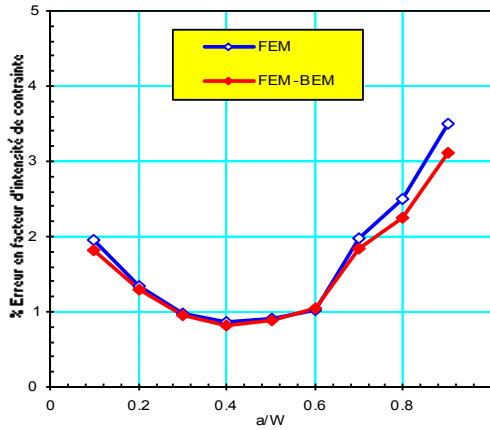


Fig. 8. Evolution de l'erreur du FIC en fonction de la longueur de fissure a/W .

V.2. Analyse élastoplastique - Cas d'une fissure émanant d'un trou

Ce problème représente l'analyse d'une plaque trouée avec l'existence d'une fissure provenant de l'extrémité du trou (Fig. 4.b), dans un état de contrainte plane. La plaque a été analysée en considérant un comportement élastique parfaitement plastique avec les propriétés du matériau suivants : Module de Young $E=10000$ MPa, coefficient de Poisson $\nu=0,3$, contrainte de limite élastique $\sigma_y=100$ MPa.

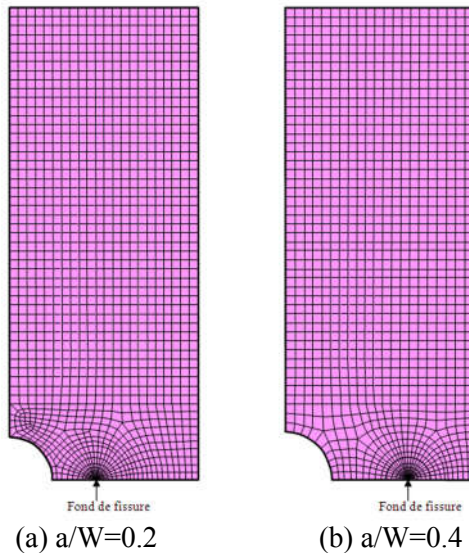
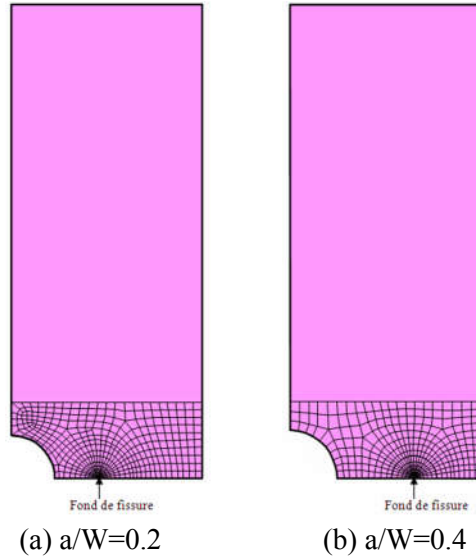


Fig. 9. Maillages par FEM de la plaque trouée en traction uniaxiale avec une fissure émanant d'un trou pour deux différentes longueurs de fissures.



(a) $a/W=0.2$ (b) $a/W=0.4$
 Fig. 10. Maillages par FEM-BEM de la plaque troué en traction uniaxiale avec une fissure émanant d'un trou pour deux différentes longueurs de fissures.

Le critère de Von Mises a été adopté. L'intégrale J a été évaluée pour deux différentes longueurs de fissure ($a/W=0.2$ et 0.4) en fonction de l'évolution de la charge appliquée. Les analyses par FEM et FEM-BEM ont été exécutées avec les modèles de maillages représentées sur les Figures 9 et 10 respectivement.

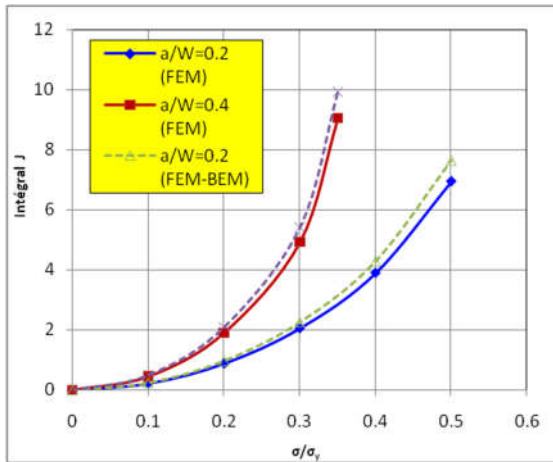


Fig. 11. Evolution de l'intégrale J en fonction de la contrainte normalisée pour $a/W= 0.2$ et 0.4 dans le cas d'une plaque troué en traction uniaxiale avec une fissure émanant d'un trou sous les conditions de contrainte plane.

L'évolution de l'intégral J en fonction de la contrainte normalisée σ/σ_y dans l'état mentionné de contrainte plane, pour $a/W= 0.2$ et 0.4 en utilisant la méthode des éléments finis et la méthode de couplage FEM-BEM est représentée sur la Fig. 11. On peut remarquer également qu'il y a un bon accord entre les deux types de solutions.

Le temps requis pour l'analyse avec les méthodes FEM et FEM-BEM, pour diverses valeurs de σ_y/σ est présenté sur la Fig. 12. A partir de cet histogramme, on peut remarquer qu'une légère différence des temps CPU a été trouvée entre les deux méthodes. En effet, c'est presque les mêmes tendances que l'exemple précédent.

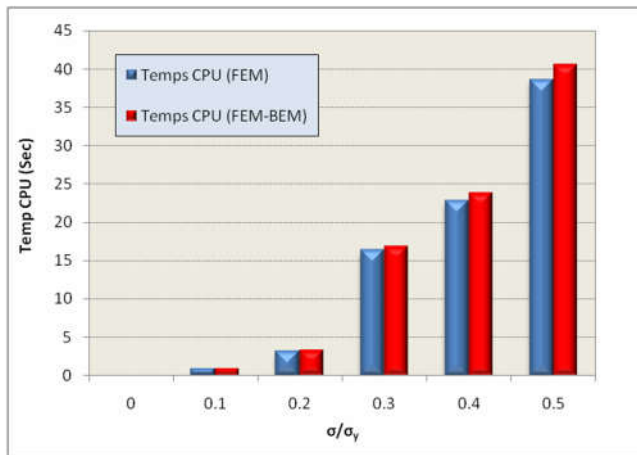


Fig. 12. Temps CPU pour l'analyse élastoplastique de la plaque troué avec fissure émanant d'un trou.

VI. Conclusion

Dans le cadre de développement d'un code de résolution des problèmes de la mécanique de la rupture, une approche itérative de couplage FEM-BEM a été proposée dans ce travail, pour un comportement élastique et élastoplastique du matériau dans le cas des structures fissurées.

La méthode des éléments finis a été utilisée pour le calcul du sous domaine contenant la fissure, du fait de sa capacité de traiter les zones plastiques et les forts gradients de contraintes, tandis que le sous-domaine restant, souvent linéaire élastique, est analysé par la méthode des éléments frontière, bien adéquate pour ce type de comportement, et donnant l'avantage de réduire la partie du domaine à mailler.

L'efficacité de la méthode proposée et sa précision par rapport à la FEM a été mise en évidence en traitant deux exemples de la mécanique de la rupture élastique et élastoplastique. La comparaison des résultats obtenus par les deux méthodes ainsi qu'avec quelques résultats analytiques, démontre que la méthode du couplage, outre que sa capacité de traiter un domaine plus vaste de problèmes, est une technique alternative très satisfaisante par rapport la FEM.

Références

- [1] H.D. Bui, Mécanique de la Rupture Fragile, France, editions Masson, 1978.
- [2] R.S. Barsoum, "On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics," International Journal for Numerical Methods in Engineering., vol. 10, pp. 25-37, 1976.
- [3] J.R. Rice, "A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks," Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics, vol. 35, pp. 485-502, 1974.
- [4] O.C. Zienkiewicz, D.W. Kelly and P. Batts, "The coupling of the finite element method and boundary solutions procedures," International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 11, pp. 355-375, 1977.
- [5] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, The finite element method, 4th ed., McGraw-Hill, London, England, 1991.
- [6] D.R.J. Owen and A.J. Fawkes, Engineering fracture mechanics, Swansea, Pineridge Press LTD,1983.
- [7] Aour B., Rahmani O., Nait-Abdelaziz M., (2007), A coupled FEM/BEM approach and its accuracy for solving crack problems in fracture mechanics, Int. J. Solids Struct., 44, 2523–2539.
- [8] D. Boumaiza, B. Aour, On the efficiency of the iterative coupling FEM-BEM for solving the elasto-plastic problems, Engineering Structures, Vol. 72, pp. 12-25, 2014.
- [9] H. Tada, P.C. Paris and G.R. Irwin, Stress analysis of cracks handbook, Hellertown, USA, Del Research Corporation, 1973.
- [10] Flemming M., Chu Y., Moran B. and Belytschko T., Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol.40,pp. 1484-1504, 1997.